Liczby parzystocyfrowe (rozwiązanie)

XIV OIJ, zawody I stopnia, tura otwarta
30 września – 16 grudnia 2019

Autor zadania: **Karol Pokorski**
Opracowanie: **Alicja Kluczek, Kacper Walentynowicz**

Olimpiada Informatyczna Juniorów

Przypomijmy, że w tym zadaniu rozpatrujemy liczby *parzystocyfrowe*, które składają się jedynie z cyfr, które są parzyste (0, 2, 4, 6, 8).

Interesuje nas, jaka jest N-ta liczba, gdyby wszystkie liczby parzystocyfrowe ustawić w kolejności rosnącej.

W zadaniu pożyteczny będzie zapis liczby w *systemie piątkowym*, czyli systemie pozycyjnym o podstawie 5. W systemie piątkowym używa się tylko cyfr 0, 1, 2, 3 i 4, więc zapis 10 oznacza liczbę 5, 11 liczbę 6, $\ldots$, 14 liczbę 9, 20 liczbę 10, $\ldots$, 44 liczbę 24, 100 liczbę 25, i tak dalej. Ostatnia cyfra oznacza jedności, przedostatnia – zamiast dziesiątek – wielokrotności 5, poprzednia zamiast setek wielokrotności $5^2 = 25$, a ogólnie cyfra na k-tej od końca pozycji odpowiada wielokrotnościom liczby 5^k.

Wypiszmy kolejne liczby zapisane w systemie piątkowym:

$$1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 20, 21, 22, 23, 24, 30, 31, 32, 33, 34, 40, 41, 42, 43, 44, 100, 101, 102, 103, 104, 110, 111, \ldots .$$

a następnie kilka pierwszych liczb parzystocyfrowych, uporządkowanych rosnąco, tak jak jest napisane w zadaniu:

$$2, 4, 6, 8, 20, 22, 24, 26, 28, 40, 42, 44, 46, 48, 60, 62, 64, 66, 68, 80, 82, 84, 86, 88, 200, 202, 204, 206, 208, 220, 222, \ldots .$$

Widać, że drugi ciąg, gdyby wszystkie cyfry podzielić przez 2, stałby się identyczny z pierwszym! Wyciągamy z tego wniosek, że N-ta liczba parzystocyfrowa odpowiada w ten sposób liczbie N zapisanej w systemie piątkowym. To prowadzi nas do następującego algorytmu:

- dla danej liczby N, zamień ją z systemu dziesiątkowego na system piątkowy,
- każdą otrzymaną cyfrę pomnóż przez 2 ($0 \to 0$, $1 \to 2$, $2 \to 4$, $3 \to 6$, $4 \to 8$).

Drugi krok jest bardzo łatwy, skupmy się zatem na tym, jak zamienić liczbę z systemu dziesiątkowego na piątkowy. Dla przykładu z zadania (`par0b`): liczba $N = 7921$ jest zapisana w systemie dziesiątkowym, to oznacza, że każda kolejna cyfra (rozpoczynając od prawej strony) ma wartość dziesięciokrotnie większą od poprzedniej, tj:

$$7921 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 10 + 9 \cdot 100 + 7 \cdot 1000.$$

1	2	9	7
1	10	100	1000
10^0	10^1	10^2	10^3

Chcemy teraz znaleźć jej reprezentację w systemie piątkowym, to jest szukamy cyfr $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 \ldots$, takich że

$$c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot 5 + c_2 \cdot 25 + c_3 \cdot 125 + c_4 \cdot 625 + \ldots .$$

Będziemy ustalać te cyfry po kolei. Jak znaleźć najmniej znaczącą cyfrę, tj. c_0? Tak jak w systemie dziesiętnym cyfra jedności jest po prostu resztą liczby N z dzielenia przez 10, tak samo w systemie piątkowym ostatnia cyfra jest resztą z dzielenia przez 5. W naszym przypadku 7921 modulo $5 = 1$. Jeżeli już wiemy, jaka jest pierwsza cyfra, możemy przejść do kolejnej. Zauważmy teraz, że jeżeli podzielimy N przez 5, to sprowadzimy nasze zadanie do tego samego problemu: w systemie piątkowym podzielenie N przez 5 z zaokrągleniem w dół po prostu usuwa z niej ostatnią cyfrę. A zatem algorytm może, po znalezieniu ostatniej cyfry, przejść do liczby $\left\lfloor \frac{N}{5} \right\rfloor$ i kontynuować działanie.

W naszym przykładzie $\left\lfloor \frac{7921}{5} \right\rfloor = 1584$, a 1584 modulo $5 = 4$. Kontynuując tą metodę otrzymujemy kolejne cyfry: $[1, 4, 1, 3, 2, 2]$. Możemy jeszcze sprawdzić nasze obliczenia:

$$1 \cdot 1 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^5 = 7921.$$

Zatem faktycznie

$$7921_{10} = 223141_5.$$

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

Teraz aby otrzymać 7921-tą liczbę parzystocyfrową, wystarczy każdą otrzymaną cyfrę pomnożyć przez 2 i otrzymujemy szukany wynik: 446282.

Sam algorytm możemy zaimplementować na różne sposoby. Można, na przykład, kolejne znajdowane cyfry w systemie piątkowym zapamiętywać w tablicy (C++) lub liście (Python), a potem wypisać cyfry w odwrotnej kolejności pomnożone przez 2:

par.cpp

```cpp
#include "bits/stdc++.h"

using namespace std;

int main() {
  // Wyłączamy synchronizację.  Przyśpiesza to operacje wejścia/wyjścia.
  ios_base::sync_with_stdio(0);

  long long N;
  cin >> N;

  // W tablicy cyfry[] będziemy trzymać kolejne cyfry zapisu piątkowego N.
  // Możemy bezpiecznie założyć, że nie będzie ich nigdy więcej niż 50,
  // ponieważ N jest równe co najwyżej 10^18, a to mniej niż 5^50.
  int cyfry[50];

  // Zmienna k oznacza miejsce, na które wpisujemy kolejną znalezioną cyfrę.
  // Zaczynamy od k = 0, po każdej wpisanej cyfrze zwiększamy k.
  int k = 0;

  // Będziemy znajdować kolejne cyfry N, dzieląc za każdym razem N przez 5,
  // aż liczba N zmniejszy się do 0.
  while (N>0) {
    cyfry[k] = N%5;
    k++;
    N = N/5;
  }

  // Teraz wypisujemy cyfry, od ostatniej znalezionej (czyli od k-1 do 0).
  // Każdą wypisaną cyfrę mnożymy przez 2.
  for (int i=k-1; i>=0; i--) cout << 2*cyfry[i];
}
```

par.py

```python
N = int(input())

# W liście "cyfry" zapiszemy kolejne cyfry piątkowe liczby N
# (od ostatniej cyfry do pierwszej)
cyfry = []

# Będziemy znajdować kolejne cyfry N, dzieląc za każdym razem N przez 5,
# aż liczba N zmniejszy się do 0.
while N>0:
    ostatnia = N%5
    cyfry.append(ostatnia)
    N = N//5

# Teraz wypisujemy cyfry, odwracając listę, i mnożąc każdą cyfrę przez 2
# Nie chcemy jednak znaku nowej linii po każdej cyfrze.
for c in reversed(cyfry):
    print(2*c, end='')
```


Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

Zaprezentujemy jeszcze jeden sposób rozwiązania tego problemu, używający rekurencji do znajdowania kolejnych cyfr szukanej liczby parzystocyfrowej. Zauważ, że mnożymy cyfry przez 2 w trakcie wywołania rekurencyjnej funkcji.

par_rek.py

```python
def parzystocyfrowa(n):
    # Przypadek końcowy rekurencji.  Jeżeli n = 0, zwróć pusty napis,
    # skończyliśmy budować liczbę.
    if n == 0: return ""
    else:
        # Ustal kolejną cyfrę w systemie piątkowym.
        cyfra = n%5
        # Pomnóż ją przez dwa (aby była parzysta).
        parzysta_cyfra = 2*cyfra
        # I wywołaj się rekurencyjnie, doklejąc tę cyfrę z prawej strony
        # (konwertując do napisu).
        return parzystocyfrowa(n//5) + str(parzysta_cyfra)

N = int(input())
print(parzystocyfrowa(N))
```

par_rek.cpp

```cpp
#include "bits/stdc++.h"

using namespace std;

string parzystocyfrowa(long long n) {
  // Przypadek końcowy rekurencji.  Jeżeli n = 0, zwróć pusty napis,
  // skończyliśmy budować liczbę.
  if (n == 0) return "";
  else {
    // Ustal kolejną cyfrę w systemie piątkowym.
    int cyfra = n%5;
    // Pomnóż ją przez dwa (aby była parzysta).
    int parzysta_cyfra = 2*cyfra;
    // I wywołaj się rekurencyjnie, doklejąc tę cyfrę z prawej strony
    // (konwertując do napisu).
    return parzystocyfrowa(n/5) + to_string(parzysta_cyfra);
  }
}

int main() {
  // Wyłączamy synchronizację.  Przyśpiesza to operacje wejścia/wyjścia.
  ios_base::sync_with_stdio(0);

  long long N;
  cin >> N;
  cout << parzystocyfrowa(N) << "\n";
}
```

W języku C++ warto było zwrócić uwagę, że liczba na wejściu była dość duża i należało użyć typu `long long`, zamiast `int` do jej przechowywania. Dodatkowo, wynik przekraczał nawet typ `long long`, zatem należało albo utrzymywać tę liczbę w postaci napisu (jak powyżej), bądź tablicy cyfr.

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".