Optymalizacja mandatów (rozwiązanie)

Autor zadania: **Andrii Orap**
Opracowanie: **Paweł Anikiel, Krzysztof Kiljan**
Opis rozwiązania: **Lech Duraj**

Olimpiada Informatyczna Juniorów

W tym zadaniu dane są dwa ciągi: $K = (K_1, \ldots, K_N)$ oraz $R = (R_1, \ldots, R_N)$. Trzeba je połączyć ze sobą tak, żeby suma „sklejeń" liczby K_i oraz odpowiadającej jej liczbie R_j była łącznie jak najmniejsza.

Okazuje się, że prawidłowym rozwiazaniem tego zadania jest zadziwiająco prosty algorytm (*„zachłanny"*):

- Posortuj ciąg K rosnąco, a R malejąco (tak aby $K_1 \leq K_2 \leq \ldots \leq K_N$, zaś $R_1 \geq R_2 \geq \ldots \geq R_N$).
- Dla każdego i sklej K_i z R_i i zsumuj powstałe ze sklejenia liczby.

Rozwiązanie to jest nietrudne do zaimplementowania, w oczywisty sposób działa w czasie $O(N \log N)$, zastanówmy się zatem nad jedyną nietrywialna kwestią: dlaczego działa?

Zauważmy, że możemy na wstępie od razu założyć, że $K_1 \leq K_2 \leq \ldots \leq K_N$, a potem zastanowić się, jak uporządkować ciąg R, żeby suma sklejeń była możliwie najmniejsza. Oznaczmy tą (jeszcze nieznaną) kolejność przez $R_{\sigma(1)}, R_{\sigma(2)}, \ldots, R_{\sigma(N)}$. Wprowadźmy oznaczenie $c(x)$ na liczbę cyfr dziesiętnych liczby x – wtedy sklejenie liczby K_i z $R_{\sigma(i)}$ ma wartość $K_i \cdot 10^{c(R_{\sigma(i)})} + R_{\sigma(i)}$. Zatem wartość całej sumy to:

$$\sum_{i=1}^{N} K_i \cdot 10^{c(R_{\sigma(i)})} + \sum_{i=1}^{N} R_{\sigma(i)}.$$

Drugi składnik to po prostu suma wszystkich liczb ciągu R i jest taki sam niezależnie od kolejności. Jeśli więc dodatkowo oznaczymy $A_j = 10^{c(R_j)}$ dla $j = 1, 2, \ldots, N$, to zadanie sprowadza się zatem do takiego ustawienia ciągu R, żeby suma $\sum_{i=1}^{N} K_i \cdot 10^{c(R_{\sigma(i)})}$ – czyli suma $\sum_{i=1}^{N} K_i \cdot A_{\sigma(i)}$ – była najmniejsza możliwa.

Tak się składa, że pewne dość znane twierdzenie matematyczne (*twierdzenie o ciągach jednomonotonicznych*) mówi dokładnie, co trzeba zrobić w tej sytuacji: najmniejszą wartość sumy otrzymujemy wówczas, gdy $A_{\sigma(1)} \geq A_{\sigma(2)} \geq \ldots \geq A_{\sigma(N)}$, czyli ciągi K i A są odwrotnie posortowane. Zatem najlepszym porządkiem będzie taki, w którym ciąg R będzie uporządkowany malejąco po wartościach $10^{c(R_i)}$, czyli po długościach liczb (jeśli jest więcej takich kolejności, dowolna z nich jest równie dobra). W szczególności posortowanie ciągu R malejąco spełnia ten warunek – dłuższe liczby na pewno znajdą się przed krótszymi. A zatem algorytm zaprezentowany na początku daje optymalny, najmniejszy możliwy wynik.

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".