Stabilny ciąg (szkic rozwiązania)

Autor zadania: **Karol Pokorski**
Opracowanie: **Daniel Goc, Stanisław Findeisen**
Opis rozwiązania: **Karol Pokorski**

W zadaniu mamy wybrać podciąg (niekoniecznie spójny) podanego ciągu wejściowego, w którym każde dwie sąsiednie wybrane liczby mają jakiś wspólny dzielnik.

Rozwiązanie powolne

Zadanie można rozwiązać z użyciem programowania dynamicznego. Niech $DP[i]$ oznacza największą długość podciągu, który spełnia warunki zadania i kończy się na elemencie A_i. Wówczas otrzymujemy następujący wzór: $DP[i] = 1 + \max_j DP[j]$. W tym wzorze j przebiega po indeksach, które są mniejsze od i oraz elementy A_i oraz A_j mają jakiś wspólny dzielnik (można to sprawdzić na przykład algorytmem Euklidesa).

Naiwna implementacja powyższego algorytmu ma złożoność co najmniej kwadratową.

Optymalizacje rozwiązania

Powyższy pomysł można zoptymalizować na wiele możliwych sposobów, główną wspólną ich obserwacją jest nie rozpatrywać wszystkich par (i, j). Przykładowo, dla każdego czynnika pierwszego p, wystarczy rozpatrywać jedynie sąsiadów w ciągu elementów podzielnych przez p (nie ma nigdy sensu „przeskakiwać", bo nie może to polepszyć wyniku). Innymi słowy, dla ustalonej pozycji i oraz czynnika pierwszego p w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby A_i, wystarczy przy obliczaniu wartości $DP[i]$ skorzystać z najpóźniejszego $j < i$, takiego że A_j jest wielokrotnością p.

Ponieważ każda liczba może mieć co najwyżej logarytmicznie wiele czynników pierwszych, liczba sprawdzanych par spada do $O(N \log \max A_i)$.

Konieczne jest jednak szybkie rozkładanie liczb na czynniki pierwsze. Można w tym celu na przykład przygotować sobie zbiór wszystkich liczb pierwszych do $\sqrt{10^8} = 10\,000$ (na przykład sitem Eratostenesa lub nawet naiwnie) i sprawdzać podzielność liczby jedynie przez liczby pierwsze do tego zakresu. Ewentualna pozostałość po wykonaniu takiego sprawdzenia jest liczbą pierwszą (każda liczba złożona musi zawierać czynnik pierwszy, który nie przekracza jej pierwiastka kwadratowego).

Odzyskanie pełnego rozwiązania

Znajomość wartości $DP[\cdot]$ jest wystarczająca do wypisania wartości R z pierwszego wiersza wyjścia. Możliwe jest jednak również wypisanie całego rozwiązania cofając się po pozycjach w tablicy $DP[\cdot]$ rozpoczynając od dowolnej pozycji z wartością R. Powodem, dla którego tam wpisaliśmy R było przedłużenie jakiegoś podciągu długości $R - 1$ o kolejny element. Należy znaleźć który to był element i analogicznie odzyskać resztę rozwiązania. Podmieniając wartość $DP[\cdot]$ moglibyśmy zapisać sobie pozycję tego elementu, ewentualnie zamiast tego podczas odzyskiwania wyniku możemy ponownie przejrzeć wszystkie czynniki pierwsze liczby kończącej ciąg.

Ostatecznie, rozwiązanie wzorcowe działa w czasie $O(N \cdot \frac{\sqrt{\max A_i}}{\log \max A_i})$.

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji i Nauki w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".