Test wiedzy w wersji Python (z odpowiedziami)

XVI OIJ, zawody I stopnia, tura testowa
6 października 2021

Olimpiada Informatyczna Juniorów

Poniżej znajdują się rozwiązania zadań pierwszego podejścia tury testowej zawodów I stopnia XVI Olimpiady Informatycznej Juniorów (oij.edu.pl).

1. **Która instrukcja służy do sprawdzenia warunku i (jednokrotnego) wykonania instrukcji zależnie od tego czy ten warunek jest spełniony?**

   ☐ `condition`

   ☒ `if`

   ☐ `check`

   ☐ `true`

   ☐ `while`

2. **W jaki sposób zapisać w zmiennej `x` długość napisu zapisanego w zmiennej `y` typu `str`?**

   ☐ `x == y->length`

   ☐ `x <- size(y)`

   ☒ `x = len(y)`

   ☐ `x := y->size`

   ☐ `set(x, size(y))`

3. **W jaki sposób obliczyć wynik działania a^3?**

   ☐ `a ^ 3`

   ☐ `exp(a, 3)`

   ☒ `a * a * a`

   ☐ `a * 3`

   Rozwiązanie:
   Operacja `exp` przyjmuje tylko jeden argument i oblicza e^x. Operator `^` nie oblicza potęgi, a służy do obliczania XORa (alternatywy rozłącznej)[a] dwóch argumentów.

   [a] `https://pl.wikipedia.org/wiki/Alternatywa_roz%C5%82%C4%85czna#Informatyka`

© Olimpiada Informatyczna Juniorów, 2021

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji i Nauki w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

CC BY NC SA

4. **Rozważmy następujący fragment programu:**

```
elems = ...
...
p = 0
for i in range(1, len(elems)):
  if elems[i] > elems[p]:
    p = i
```

Co zawiera zmienna `p` po wykonaniu powyższego kodu?

- ☐ wartość największego elementu z `elems`
- ☐ liczbę elementów `elems`
- ☐ liczbę elementów `elems` większych niż `elems[0]`
- ☒ pozycję pierwszego największego elementu z `elems`

Rozwiązanie:
Elementy `elems` są przeglądane po kolei, od lewej do prawej, a zmienna `p` utrzymuje indeks największego dotychczas przeanalizowanego elementu z `elems` i jest podmieniana na `i`, gdy `elems[i] > elems[p]` czyli gdy przenalizowany zostanie element, który podwyższa maksimum.

5. **Które z poniższych fragmentów obliczają 33 procent liczby zapisanej w zmiennej `x` typu `float`?**

- ☐ `x / 3`
- ☒ `x * 0.33`
- ☐ `x % 33`
- ☒ `x / 100 * 33`
- ☐ `33 % x`
- ☐ `x * 33%`

Rozwiązanie:
Operator `%` służy do obliczania reszty z dzielenia (a nie procenta z danej wartości). Jeżeli zmienna `x` jest typu `float` to podzielenie przez 100 nie spowoduje zaokrąglenia w dół do najbliższej liczby całkowitej (co więcej, w Pythonie 3 operator `/` nie zaokrągla w dół nawet dla typu `int`, robi to dopiero operator `//`). Pomnożenie przez 0.33 również jest poprawną metodą obliczenia 33% liczby.
Podzielenie przez 3 nie jest dokładnie obliczeniem 33 procent ($\frac{1}{3}$ to $33\frac{1}{3}\%$).

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji i Nauki w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

6. **Rozważmy poniższą funkcję:**

```
def oblicz(n):
  wynik = 0
  for i in range(1, n + 1):
    wynik += n // i
  return wynik
```

Jaki wynik zwróci wywołanie `oblicz(25)`**?**

87

Rozwiązanie:
Powyższa funkcja oblicza wartość

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor$$

Dla $n = 25$, kilka pierwszych składników tej sumy to odpowiednio: 25, 12, 8, 6, 5, 4. Można teraz policzyć ile składników jest równych 3, 2 oraz 1:

- wartość 3 jest dla składników $\lfloor \frac{25}{7} \rfloor$ oraz $\lfloor \frac{25}{8} \rfloor$,
- wartość 2 jest dla składników $\lfloor \frac{25}{9} \rfloor$, $\lfloor \frac{25}{10} \rfloor$, $\ldots$, $\lfloor \frac{25}{12} \rfloor$,
- pozostałe składniki (dla mianowników $13, 14, \ldots, 25$ są równe 1).

A zatem suma, która będzie obliczona przez funkcję to: $25 + 12 + 8 + 6 + 5 + 4 + (3 \cdot 2) + (2 \cdot 4) + (1 \cdot 13) = 87$.

7. **Ile gwiazdek wypisze poniższy fragment programu?**

```
for i in range(6):
  for j in range(6):
    print('*', end='')
```

36

Rozwiązanie:
Wewnętrzna pętla wypisuje 6 gwiazdek (dla $j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$). Zewnętrzna pętla wykonuje 6 iteracji (dla $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$) czyli zostanie wypisane $6 \cdot 6 = 36$ gwiazdek.

8. **Rozważmy poniższą funkcję:**

```
def funkcja(napis):
  wynik = ''
  for i in range(1, len(napis), 2):
    wynik += napis[i]
  return wynik
```

Jaki będzie wynik wywołania `funkcja('olimpiada')`**?**

lmid

Rozwiązanie:
Powyższa funkcja dodaje kolejne znaki napisu do wyniku, zaczynając od pozycji 1 (przypomnijmy, że pozycje numerowane są od lewej poczynając od 0) i przeskakując co 2 (a więc do wyniku zostaną dodane znaki na pozycjach 1, 3, 5 oraz 7, a więc `l`, `m`, `i` oraz `d`).

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji i Nauki w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

9. **Rozważmy poniższą funkcję:**

```
def funkcja(a, b):
  wynik = 0
  while b > 0:
    wynik += a
    b -= 1
  return wynik
```

Zakładając, że zmienne `a` **oraz** `b` **są całkowite, dodatnie i nie przekraczają** 100**, który z poniższych kodów jest równoważny wywołaniu** `funkcja(a, b)`**?**

- ☐ `a // b`
- ☐ `a - b`
- ☐ `a + b`
- ☒ `a * b`

Rozwiązanie:
Powyższy kod oblicza $\underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{b} = a \cdot b$.

10. **Ile równa jest najmniejsza wspólna wielokrotność liczb** $1, 2, 3, \ldots, 10$**?**

2520

Rozwiązanie:
Aby obliczyć najmniejszą wspólną wielokrotność, wyznaczy rozważyć rozkłady na czynniki pierwsze liczb od 1 do 10: wśród nich są liczby $9 = 3^2$, $8 = 2^3$, 7 oraz 5. Pozostałe liczby zawierają tylko podzbiory tych czynników. A zatem liczba $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 = 2\,520$ jest najmniejszą wielokrotnością liczb $1, 2, 3, \ldots, 10$.

11. **Rozważmy poniższą funkcję:**

```
def rad(n):
  wynik = 1
  i = 2
  while i * i <= n:
    if n % i == 0:
      wynik *= i
      while n % i == 0:
        n //= i
    i += 1
  if n > 1:
    wynik *= n
  return wynik
```

Ile jest liczb naturalnych n **mniejszych niż** 255**, dla których** `rad(n) == 10`**?**

9

Rozwiązanie:
Powyższa funkcja oblicza iloczyn wszystkich czynników pierwszych w rozkładzie liczby n, przy czym każdy czynnik liczony jest tylko raz nawet jeśli występuje w większej potędze w liczbie n. Aby wartość ta była równa 10 liczba musi być więc wielokrotnością liczby 10 i nie posiadać innych czynników w rozkładzie niż 2 oraz 5. Są to liczby: 10, 20, 40, 50, 80, 100, 160, 200, 250.
Ciekawostka: Wartość ta w matematyce jest nazywana *radykałem*, stąd nazwa funkcji w zadaniu.

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji i Nauki w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

12. **Rozważmy poniższą funkcję:**

```
def js(n):
  wartosc = 1
  i = 1
  while True:
    wartosc *= i
    if wartosc > n:
      return i - 1
    i += 1
```

Jaka jest największa wartość parametru `n`**, dla której** `js(n) == 4`**?**

119

Rozwiązanie:
Zmienna `wartosc` w powyższej funkcji w kolejnych iteracjach pętli przyjmuje wartość $i!$ (oznaczamy tak silnię liczby naturalnej i, tj. iloczyn wszystkich liczb naturalnych dodatnich nie większych niż i)[a] . Pętla przerywana jest, gdy wartość silni przekroczy n i zwracana jest wartość $i - 1$. Aby zatem funkcja zwróciła 4, pętla musi się przerwać dla zmiennej `wartosc` równej $5! = 120$. Największa wartość n, dla której tak jest jest równa 119.
Funkcja zwraca największą liczbę k, dla której $k! \leq n$.

[a] `https://pl.wikipedia.org/wiki/Silnia`

13. **Rozważmy poniższą funkcję:**

```
def mx(tab, x):
  wynik = 0
  for y in tab:
    wynik = max(wynik, x ^ y)
  return wynik
```

Niech `tab = [11, 10, 24, 26]`**. Jaką najmniejszą wartość może zwrócić wywołanie** `mx(tab, x)` **dla odpowiednio dobranej nieujemnej całkowitej wartości** `x`**?**

17

Rozwiązanie:
Powyższa funkcja dla ustalonego `tab` zwraca maksimum z $11 \oplus x$, $10 \oplus x$, $24 \oplus x$, $26 \oplus x$, gdzie $\oplus$ to operacja alternatywy rozłącznej (XOR)[a].
Rozważmy zapisy liczb 11, 10, 24 oraz 26 w systemie dwójkowym. Są to: 1011_2, 1010_2, 11000_2, 11010_2. Niezależnie od tego czy w liczbie x na piątej od końca pozycji bitowej będzie jedynka czy zero, w wyniku na tej pozycji będzie jedynka (obliczymy alternatywę rozłączną x z jakąś liczbą, która ma na tej pozycji bitowej zero oraz z jakąś liczbą, która ma tam jedynkę). Wynik więc jest równy co najmniej 16. Możliwe jest uzyskanie zera na drugiej, trzeciej i czwartej od końca pozycji bitowej jeżeli $x = 10$ lub $x = 11$. Jednak niezależnie od tego wyboru na ostatniej pozycji bitowej uzyskamy wtedy jedynkę. A zatem wynikiem zadania jest 17 (osiągane dla $x \in \{10, 11\}$).

[a] `https://pl.wikipedia.org/wiki/Alternatywa_roz%C5%82%C4%85czna#Informatyka`

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji i Nauki w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

14. **Rozważmy poniższą funkcję:**

```
def ws(tab, p, x):
  if p >= len(tab):
    return False
  if tab[p] == x:
    return True
  return ws(tab, p + 1, x)
```

Dla jakich zawartości `tab` **wywołanie** `ws(tab, 2, 7)` **zwróci** `true`**?**

- ☒ `[3, 7, 1, 7, 5, 2]`
- ☐ `[4, 9, 4, 1]`
- ☒ `[1, 2, 7]`
- ☒ `[5, 8, 0, 2, 7]`
- ☐ `[2]`
- ☐ `[7, 1, 2, 3, 4]`

Rozwiązanie:
Powyższa funkcja rekurencyjnie poszukuje `x` w `tab` zaczynając od pozycji `p` i szukając w prawo. A zatem należy zaznaczyć odpowiedzi, w których liczba 7 występuje chociaż raz na pozycji 2 lub późniejszej (przypominamy, że numerowanie elementów jest od 0).

15. **Celem poniższej funkcji jest zmodyfikować** `tab`**, aby odwrócić kolejność jej elementów. Jak można uzupełnić warunek w** `...`**, aby to osiągnąć?**

```
def odwracaj(tab):
  n = len(tab)
  i = 0
  while ...:
    tab[i], tab[n - 1 - i] = tab[n - 1 - i], tab[i]
    i += 1
```

- ☐ `i < n`
- ☒ `i < n // 2`
- ☐ `i <= n // 2`
- ☒ `i < n - 1 - i`
- ☐ `i <= n`

Rozwiązanie:
Funkcja zamienia miejscami pary elementów pierwszy z ostatnim, drugi z przedostatnim itd. Jeżeli warunek byłby `i < n` to funkcja każdą parę elementów zamieniłaby dwukrotnie (czyli w efekcie każdy element byłby na swoim miejscu). Jeżeli warunek byłby `i <= n` to w funkcji odwołalibyśmy się do elementu na pozycji n lub -1. Gdyby warunkiem było `i <= n // 2` to dla parzystej długości funkcja zamieniłaby środkowe elementy dwukrotnie.
Warunki `i < n // 2` oraz `i < n - 1 - i` są równoważne i ich dodanie powoduje, że niezależnie od parzystości długości tablicy, odpowiednie pary elementów zamieniane są dokładnie raz.

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji i Nauki w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

16. **Ile zer ma liczba $20^{50} \cdot 50^{20} \cdot 90^{90}$ na końcu zapisu dziesiętnego?**

180

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} 20^{50} \cdot 50^{20} \cdot 90^{90} &= (2 \cdot 10)^{50} \cdot (5 \cdot 10)^{20} \cdot (3^2 \cdot 10)^{90} \\ &= 2^{50} \cdot 5^{20} \cdot 3^{180} \cdot 10^{50} \cdot 10^{20} \cdot 10^{90} \\ &= (2 \cdot 5)^{20} \cdot 2^{30} \cdot 3^{180} \cdot 10^{160} \\ &= 2^{30} \cdot 3^{180} \cdot 10^{180} \end{aligned}$$

Powyższa liczba jest podzielna przez 10^{180}, ale nie jest podzielna przez 10^{181}, a zatem kończy się dokładnie 180 zerami w zapisie dziesiętnym.

17. **Poprawnym nawiasowaniem nazywamy napis, który może powstać z wyrażenia arytmetycznego przez opuszczenie wszystkiego poza znakami nawiasów. Na przykład napis `()(())` jest poprawnym nawiasowaniem, mógł powstać na przykład z wyrażenia `(2 + 2) * (1 + (2 + 3) * 4)`. Celem poniższej funkcji jest zbadać czy przekazany napis jest poprawnym nawiasowaniem.**

```
def czy_poprawne_nawiasowanie(naw):
  min_balans = 0
  balans = 0
  for x in naw:
    if x == '(':
      balans += 1
    elif x == ')':
      balans -= 1
    else:
      return False
    min_balans = min(min_balans, balans)
  return ...
```

Jak należy uzupełnić `...`, aby to osiągnąć?

- ☐ `balans == 0`
- ☐ `(min_balans < balans) and (balans >= 0)`
- ☐ `min_balans == 0`
- ☒ `(min_balans >= 0) and (balans == 0)`
- ☐ `min_balans <= balans`

Rozwiązanie:
Balans nawiasów (różnica między liczbą nawiasów otwartych a zamkniętych) musi być równy 0, dodatkowo w żadnym momencie balans nie może być ujemny (dla każdego początkowego fragmentu nawiasowania liczba nawiasów otwierających musi być większa lub równa liczbie nawiasów zamykających).

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji i Nauki w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

18. **Jaka jest najmniejsza liczba naturalna n, której zapis w systemie rzymskim ma dokładnie 10 znaków? Odpowiedź podaj w systemie dziesiątkowym.**

288

Rozwiązanie:
Ustalmy najpierw długość liczby n w cyfrach arabskich: każda cyfra arabska zapisywana jest w systemie rzymskim z użyciem co najwyżej czterech znaków. A zatem n musi być co najmniej trzycyfrowa ($\lfloor \frac{10}{4} \rfloor = 3$), przy czym pierwsza cyfra musi być zapisana z użyciem co najmniej dwóch znaków w systemie rzymskim (reszta z dzielenia 10 przez 4 to 2). A zatem cyfra setek szukanej liczby to 2, a pozostałe dwie cyfry muszą być zapisane z użyciem dokładnie czterech znaków rzymskich. Tak dzieje się tylko dla cyfry 8, a zatem $n = 288$.

19. **Ile zmiennych typu `str` przechowujących napisy długości $1\,000\,000$ znaków (ASCII) można zadeklarować w programie, aby zużycie pamięci (związane z przechowywaniem tych zmiennych) wynosiło około 50 MB?**

- ☐ około pięćset
- ☐ około pięciu
- ☐ kilka tysięcy
- ☒ około pięćdziesiąt
- ☐ jedną

Rozwiązanie:
Pojedynczy znak ASCII napisu zajmuje bajt, a więc zużycie pamięci związane z przechowaniem miliona znaków jest co najmniej rzędu miliona bajtów czyli około jednego megabajta. Dodatkowe, stałe zużycie pamięci na pusty napis jest pomijalnie małe przy tak długim napisie. A zatem możliwe jest utworzenie około pięćdziesięciu napisów tej długości.
Zużycie pamięci w Pythonie można sprawdzić z użyciem funkcji `sys.getsizeof`[a].

[a] `https://docs.python.org/3/library/sys.html#sys.getsizeof`

20. **Rozważmy poniższy fragment programu:**

```
for i in range(1, n + 1):
  j = 1
  while j * j <= n:
    print('*', end='')
    j += 1
```

Jaką liczbę gwiazdek wypisaną przez program można osiągnąć, odpowiednio dobierając n?

- ☐ 400
- ☒ 512
- ☒ 350
- ☐ 256
- ☒ 150

Rozwiązanie:
Program wypisuje $n \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ gwiazdek. Pytanie zatem sprowadza się do tego, czy istnieje naturalne rozwiązanie równania $n \cdot \lfloor \sqrt{n} \rfloor = M$ (dla $M \in \{150, 256, 350, 400, 512\}$). Lewa strona równości jest równa w przybliżeniu $n\sqrt{n}$, możliwe jest więc zgadnięcie ile powinno wynosić n i sprawdzenie czy jest ono całkowite.
Dane zostały dobrane tak, żeby chociaż część obliczeń była łatwa do wykonania w pamięci: $256 = 2^8$ nie jest rozwiązaniem (bo $2^{16/3}$ nie jest całkowite), ale $512 = 2^9$ jest (bo $2^{18/3} = 2^6$ jest całkowite).

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji i Nauki w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

21. **Rozważmy poniższą funkcję:**

```
def wykonuj(n):
  for i in range(1, n + 1):
    j = i
    while j % 2 == 0:
      j //= 2
      print('*', end='')
```

Zakładamy, że operacje arytmetyczne oraz porównania na zmiennych typu `int` **zajmują czas stały. Jaka jest pesymistyczna złożoność obliczeniowa funkcji** `wykonuj`**?**

- ☐ $\Theta(n \log n)$
- ☒ $\Theta(n)$
- ☐ $\Theta(n^2)$
- ☐ $\Theta(\sqrt{n})$
- ☐ $\Theta(\log n)$
- ☐ $\Theta(n\sqrt{n})$

Rozwiązanie:
Na pierwszy rzut oka widać, że złożoność powyższej funkcji jest $O(n \log n)$ (jest $O(\log n)$ obrotów pętli wewnętrznej dla każdego obrotu pętli zewnętrznej). Jednak można zauważyć, że tylko co drugi obrót pętli `for` powoduje co najmniej jeden obrót pętli `while`, tylko co czwarty obrót pętli `for` powoduje co najmniej dwa obroty pętli `while` itd. A zatem łącznie wypisanych gwiazdek (i jednocześnie operacji elementarnych) jest rzędu $n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \cdots = \Theta(n)$.
Powyższy kod jest analogią do prostego licznika binarnego.

22. **Które z poniższych zbiorów liczb można podzielić na dwa zbiory o równej sumie? Każdy element powinien trafić do dokładnie jednego zbioru.**

- ☐ $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
- ☒ $\{1, 2, 3, 5, 8, 13\}$
- ☒ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- ☐ $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 65\}$
- ☒ $\{2, 3, 5, 7, 11\}$

Rozwiązanie:
Suma elementów w zbiorze $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ jest nieparzysta, więc na pewno nie jest możliwe dokonanie żądanego podziału.
Zbiór $\{1, 2, 3, 5, 8, 13\}$ to ciąg sześciu kolejnych liczb Fibonacciego, można więc przypisać pierwszą, drugą, czwartą i piątą liczbę to jednego zbioru a trzecią i szóstą do drugiego zbioru otrzymując $1 + 2 + 5 + 8 = 3 + 13$.
Zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ można podzielić np. tak: $7 + 6 + 1 = 2 + 3 + 4 + 5$ (jest wiele sensownych metod podziału).
Zbiór $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 65\}$ nie jest możliwy do podzielenia ponieważ suma elementów innych niż 65 jest równa 63.
Zbiór $\{2, 3, 5, 7, 11\}$ można podzielić np. tak: $3 + 11 = 2 + 5 + 7$.

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji i Nauki w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

23. **Która z podanych liczb jest największa?**

- ☒ FF_{16}
- ☐ 200
- ☐ 1111111_2
- ☐ $A0_{11}$

Rozwiązanie:
$FF_{16} = 255$, $1111111_2 = 127$, a $A0_{11} = 110$.

24. **Ile jest całkowitych nieujemnych kwot, których nie można wydać nominałami 7 oraz 11?**

30

Rozwiązanie:
Zauważmy, że jeśli możliwe jest wydanie kwoty x to jest również możliwe wydanie kwoty $x + 7$. Dla każdej reszty z dzielenia kwoty przez 7 mamy zatem granicę poniżej, której nie jest możliwe wydanie żadnej kwoty o tej reszcie z dzielenia, a po osiągnięciu której jest już to możliwe. Aby tę granicę wyznaczyć, wystarczy dokładać kolejne nominały 11.
I tak:

- jest możliwe wydanie kwot $0, 7, 14, 21, \ldots$,
- nie jest możliwe wydanie kwoty 4, ale jest możliwe wydanie kwot $11, 18, 25, \ldots$,
- nie jest możliwe wydanie kwot $1, 8, 15$, ale jest możliwe wydanie kwot $22, 29, 36, \ldots$,
- nie jest możliwe wydanie kwot $5, 12, 19, 26$, ale jest możliwe wydanie kwot $33, 40, 47, \ldots$,
- nie jest możliwe wydanie kwot $2, 9, 16, 23, 30, 37$, ale jest możliwe wydanie kwot $44, 51, 58, \ldots$,
- nie jest możliwe wydanie kwot $6, 13, 20, 27, 34, 41, 48$, ale jest możliwe wydanie kwot $55, 62, 69, \ldots$,
- nie jest możliwe wydanie kwot $3, 10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, 59$, ale jest możliwe wydanie kwot $66, 73, 80, \ldots$.

25. **Dla jakich wartości parametru `n` poniższa funkcja poprawnie kończy swoje działanie (tzn. nie powoduje błędu wykonania)?**

```
def wykonuj(n):
  if n == 100:
    return
  wykonuj(n + 2)
```

- ☐ 1000
- ☒ 10
- ☒ 100
- ☐ 1

Rozwiązanie:
Funkcja kończy swoje działanie dla wartości $n = 100$ oraz wszystkich wartości parzystych mniejszych od 100.

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji i Nauki w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

CC BY NC SA

26. **Ile tablic rozmiaru $1\,000\,000$ składających się z liczb naturalnych można posortować z użyciem funkcji `sorted` na przeciętnym komputerze z roku 2020, aby czas wykonania był równy około dwóch sekund? Zakładamy, że sortowania wykonywane są jedno po drugim bez współbieżności.**

- ☐ kilka tysięcy
- ☐ nie można wykonać nawet jednego
- ☒ kilka
- ☐ kilkaset

Rozwiązanie:
Funkcja `sorted` działa w czasie $\Theta(n \log n)$ czyli można założyć, że potrzebuje około 20 milionów porównań i ewentualnych przestawień elementów do posortowania jednej tablicy. Rozsądnym jest założenie (przy obecnej szybkości przeciętnych procesorów), że 50 milionów porównań i przestawień zajęłoby około jednej sekundy. Stąd można przyjąć, że jedno posortowanie tablicy kosztuje dziesiąte części sekundy.

27. 60 **dzieci ustawiło się w kółku i zaczęło odliczać do dwóch (tzn. pierwsze dziecko mówi 1, drugie dziecko mówi 2, trzecie 1, czwarte 2, piąte 1 itd.). Każde dziecko, które mówi 2 natychmiast wypada z kółka, a wyliczanka jest dalej kontynuowana. Po pełnym okrążeniu przeprowadzana jest analogiczna wyliczanka tylko do trzech (tzn. dzieci liczą $1, 2, 3$ i każde dziecko, które mówi 3 wypada). W kolejnych okrążeniach następują analogiczne wyliczanki, ale do $4, 5, 6, \ldots$. W pewnym momencie wyliczanka jest do większej liczby niż liczba dzieci i nikt już dalej nie odpadnie. Ile dzieci pozostanie w kółku?**

8

Rozwiązanie:
Jeśli przed i-tym odliczaniem było n dzieci, to po i-tym odliczaniu jest $\lceil n \cdot \frac{i}{i+1} \rceil$ dzieci (odpada $\lfloor n \cdot \frac{1}{i} \rfloor$ dzieci). A zatem, w kolejnych odliczaniach pozostaje: $30, 20, 15, 12, 10, 9, 8$ dzieci. W kolejnych odliczaniach nie odpada już żadne dziecko.

28. **Rozważmy następującą funkcję:**

```
def oblicz(operacje):
  wynik = 0
  for x in operacje:
    if x == '+':
      wynik += 1
    if x == '*':
      wynik *= 2
  return wynik
```

Podaj napis złożony z czterech znaków `+` oraz czterech znaków $*$, który należy przekazać jako parametr `operacje`, aby `oblicz(operacje) == 35`?

++***+*+

Rozwiązanie:
Celem zadania jest uzyskanie liczby 35 z liczby 0 w skutek procesu dodawania jedynki lub mnożenia przez 2.
Jest to możliwe w ośmiu operacjach jedynie w następujący sposób:

$$0 \to 1 \to 2 \to 4 \to 8 \to 16 \to 17 \to 34 \to 35$$

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji i Nauki w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

29. **Rozważmy poniższą funkcję:**

```
def oblicz(n, k):
  wyniki = [[0] * (k + 1) for __ in range(n + 1)]
  for i in range(n + 1):
    wyniki[i][0] = 1
    for j in range(1, min(k, i) + 1):
      wyniki[i][j] += wyniki[i - 1][j]
      wyniki[i][j] += wyniki[i - 1][j - 1]
  return wyniki[n][k]
```

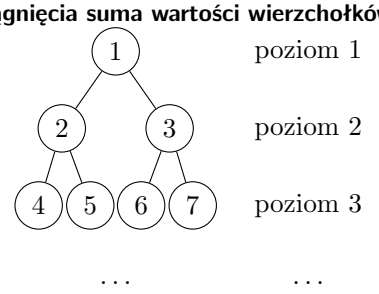
Jaki jest wynik wywołania `oblicz(10, 5)`**?**

252

Rozwiązanie:
Przedstawiony kod powyżej oblicza trójkąt Pascala, zawierający w kolejnych wierszach kolejne symbole Newtona $\binom{n}{k}$ korzystając z tożsamości $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$. A zatem zwrócony wynik to:

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 7 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 2 = 252$$

30. **Na poniższym rysunku wierzchołki są na trzech poziomach, każdy wierzchołek na poziomie innym niż ostatni jest połączony z dwoma na poziomie kolejnym. Wierzchołki są numerowane od 1 kolejno poziomami, a na każdym poziomie od lewej do prawej. Rozważmy podobny rysunek, ale o sześciu poziomach. Ile wynosi największa możliwa do osiągnięcia suma wartości wierzchołków na ciągu kolejno połączonych wierzchołków bez zawracania?**



Fragment pełnego drzewa binarnego (do trzech poziomów).

220

Rozwiązanie:
Najlepiej jest aby ścieżka była od skrajnie prawego dolnego wierzchołka, poruszała się w górę drzewa do pewnego wierzchołka i potem, po jednym skręcie do lewego syna biegła już tylko w prawo i w dół do innego skrajnie dolnego wierzchołka (lub odwrotnie). Wierzchołków w drzewie jest $2^6 - 1 = 63$, taki jest więc numer wierzchołka startowego.
Można zauważyć, że w tym drzewie rodzicem wierzchołka x jest wierzchołek $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$, lewym synem wierzchołka x jest wierzchołek $2x$, a prawym synem wierzchołka x jest wierzchołek $2x + 1$.
Optymalna ścieżka przebiega kolejno po wierzchołkach:

$$63 \to 31 \to 15 \to 7 \to 3 \to 6 \to 13 \to 27 \to 55$$

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji i Nauki w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".