Przykładowe pytania testowe (wersja C++)

Olimpiada Informatyczna Juniorów

1. **Które z poniższych są instrukcjami pętli w C++?**

   - ■ `for`
   - ■ `while`
   - ☐ `repeat`
   - ☐ `iterate`

   Rozwiązanie:
   Instrukcje `for` oraz `while` to pętle (instrukcje sterujące służące do wielokrotnego wykonania innych instrukcji).
   Instrukcje `repeat` oraz `iterate` nie istnieją w języku C++.

2. **Rozważmy fragment programu pokazany poniżej:**

```
cout << "x";
for (int i = 5; i < 17; i += 4)
  cout << "xx";
cout << "xxx";
```

   Ile znaków `x` zostanie wypisanych przez powyższy kod?

   10

   Rozwiązanie:
   Program poza pętlą wypisze cztery znaki `x`. Pętla wykona się trzy razy (dla $i = 5$, $i = 9$ oraz $i = 13$) wypisując za każdym razem po dwa znaki `x`. Przy wartości $i = 17$ pętla zostanie przerwana.

3. **Dla jakich zawartości tablicy T poniższy program wypisze napis `poprawiam` dokładnie trzy razy?**

```
int maksimum = 0;
for (int i = 0; i < 5; i++) {
  if (T[i] > maksimum) {
    cout << "poprawiam\n";
    maksimum = T[i];
  }
}
```

   - ☐ `[3, 2, 1, 9, 5]`
   - ■ `[1, 2, 3, 2, 1]`
   - ☐ `[9, 8, 9, 8, 9]`
   - ■ `[-2, 3, -1, 13, 100]`
   - ☐ `[0, 5, 2, 9, 1]`

   Rozwiązanie:
   Program przegląda elementy tablicy zgodnie z kolejnością ich występowania i wypisuje `poprawiam` za każdym razem, gdy liczba z tablicy jest większa niż poprzednie maksimum (początkowo było równe 0).

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

4. **Rozważmy fragment programu pokazany poniżej:**

```
vector<int> p = ???;
string s = "napisik";
string t;
for (int i = 0; i < p.size(); i++)
  t.push_back(s[p[i]]);
cout << t << "\n";
```

Co należy wstawić w miejsce znaków zapytania, aby program wypisał `pisak`?

- ☐ `"pisak"`
- ☐ `{ 2, 3, 1, 4, 5 }`
- ■ `{ 2, 3, 4, 1, 6 }`
- ☐ 23416
- ☐ `{ 'p', 'i', 's', 'a', 'k' }`

Rozwiązanie:
Zmienna p jest typu `vector<int>`, a więc tylko odpowiedzi druga, trzecia i piąta prowadzą do programu, który się kompiluje.
Program przegląda kolejne elementy p i wypisuje z napisu s znaki na tych pozycjach jak element odczytany z p.

5. **Aby wypisać** 17**-tą literę alfabetu angielskiego można użyć instrukcji:**

- ☐ `cout << 'a' << 16;`
- ☐ `cout << 'a'.next(16);`
- ■ `cout << (char)('a' + 16);`

Rozwiązanie:
Pierwsza instrukcja wypisze `a16`. Druga instrukcja się nie skompiluje. Trzecia instrukcja wypisze znak o kodzie ASCII takim jak kod ASCII litery `a` plus 16. Litery alfabetu są ustawione w tablicy ASCII po kolei, dlatego będzie to 17-ta litera alfabetu.

6. **Dla jakiej wartości zmiennej x typu** `int` **prawdziwy jest warunek** `(x + 1) / 3 * 3 == x`**?**

- ■ 9
- ☐ 10
- ☐ 19
- ☐ 32
- ☐ 50
- ☐ Dla żadnej z powyższych

Rozwiązanie:
Pamiętajmy o tym, że dzielenie zmiennych typu `int` jest w C++ całkowitoliczbowe (z zaokrągleniem w dół do najbliższej liczby całkowitej). Powyższy warunek spełniony jest jedynie dla liczb x podzielnych przez 3.

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

7. **Ile pamięci operacyjnej zazwyczaj zajmuje zdefiniowana poniżej tablica podczas wykonania programu na komputerze 64-bitowym?**

```
int tab[1000][1000];
```

- ☐ Mniej niż 1 kB
- ☐ Około 4 kB
- ☐ Około 500 kB
- ■ Około 4 MB
- ☐ Więcej niż 1 GB

Rozwiązanie:
Jedna zmienna typu `int` zajmuje zazwyczaj 4 bajty niezależnie czy program wykonywany jest na komputerze 32-bitowym czy 64-bitowym. Tablica rozmiaru 1000×1000 ma milion takich zmiennych. Cztery miliony bajtów to około 4 MB.

8. **Podciągiem słowa S nazywamy dowolne słowo, które można uzyskać po zakryciu pewnej liczby liter (być może żadnej, być może wszystkich) w słowie S i odczytaniu pozostałych od lewej do prawej. Podsłowem słowa S nazywamy zaś dowolny jego spójny fragment S (może być również pusty, może być również całe słowo S).**
Niech S = `abbaab` oraz T = `babbba`. Które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe?

- ■ Słowo `baab` jest podciągiem słowa S, ale nie jest podciągiem słowa T.
- ☐ Słowo `aaa` jest podsłowem słowa S.
- ■ Słowo `abb` jest podsłowem słów S oraz T.
- ■ Słowo `bab` jest podciągiem słów S oraz T.
- ☐ Słowo `bbbb` jest podsłowem słowa T.

Rozwiązanie:
Główną trudnością zadania było jedynie zrozumienie treści i definicji podciągu (który nie musi być spójny) oraz podsłowa (które musi być spójne).

9. **Rozważmy słowa o długości 5 złożone jedynie z liter `a` oraz `b`. Ile spośród tych słów nie zawiera trzech sąsiednich jednakowych liter?**

16

Rozwiązanie:
Są 32 pięcioliterowe słowa składające się z liter `a` oraz `b`. Obliczmy ile jest tych, które zawierają trzy sąsiednie jednakowe litery (czyli ile jest „złych" słów). Są to słowa postaci `aaa??`, `bbb??`, `abbb?`, `baaa?`, `?abbb`, `?baaa`, gdzie `?` oznacza dowolną literę (`a` lub `b`). Każde złe słowo zostało w ten sposób policzone dokładnie raz. Razem jest 16 złych słów, a więc $32 - 16 = 16$ spełniających warunki zadania.

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

10. **Rozważmy fragment programu pokazany poniżej:**

```
int liczba = ???;
while (liczba > 0) {
  if ((liczba > 5) && (liczba < 95))
    liczba -= 10;
  liczba = max(0, liczba);
  liczba = min(100, liczba);
}
```

Dla których z poniższych wartości wpisanych zamiast znaków zapytania program zapętli się (tzn. nie zakończy swojego działania)?

- ☐ -3
- ■ 2
- ☐ 28
- ■ 33
- ■ 95
- ■ 105

Rozwiązanie:
Jeśli `liczba` ≤ 0 to pętla nie wykonuje się wcale, a więc program się nie zapętla. Wewnątrz pętli jeżeli w którymkolwiek momencie wartość zmiennej `liczba` nie będzie w zakresie $[6, 94]$ to program się zapętli. Dwie ostatnie instrukcje dbają o to, aby wartość zmiennej cały czas była w przedziale $[0, 100]$. Jeśli zatem pierwsza iteracja pętli będzie z wartością `liczba` większą niż 94 lub mniejszą niż 6 to program się zapętli. W pozostałych zaś przypadkach, jeśli wartość zmiennej `liczba` będzie dawać resztę 0, 5, 6, 7, 8 lub 9 przy dzieleniu przez 10 to program zakończy swoje działanie, bo każda iteracja pętli będzie zmniejszała wartość zmiennej o 10 aż wartość spadnie do mniejszej lub równej 0, co zakończy pętlę. Jeśli jednak reszta z dzielenia przez 10 będzie równa 1, 2, 3 lub 4 to program się zapętli (kilka pierwszych iteracji zredukuje wartosć zmiennej do 1, 2, 3 lub 4).

11. **Które z poniższych liczb zapisanych w systemie szesnastkowym są większe niż liczba 100 zapisana w systemie dziesiątkowym?**

- ■ AF_{16}
- ☐ 50_{16}
- ☐ 64_{16}
- ■ $F00_{16}$
- ■ $C0_{16}$

Rozwiązanie:
Liczba $100 = 6 \cdot 16 + 4$, a zatem $100_{10} = 64_{10}$. A zatem jedynie $50_{16} = 80_{10}$ oraz $64_{16} = 100_{10}$ nie są większe niż 100.

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

12. **Rozważmy poniższą funkcję:**

```
vector<int> funkcja(const vector<int>& liczby) {
  vector<int> wynik;
  map<int,int> ile;
  for (int x : liczby)
    ile[x]++;
  for (const pair<int,int>& element : ile)
    for (int i = 0; i < element.second; i++)
      wynik.push_back(element.first);
  return wynik;
}
```

Co zwraca powyższa funkcja?

- ☐ Liczbę wystąpień każdego elementu ciągu
- ■ Posortowany ciąg
- ☐ Ciąg z usuniętymi powtarzającymi się elementami
- ☐ Ciąg, w którym każdy element występuje tyle razy ile wynosi jego wartość

Rozwiązanie:
Przedstawiona funkcja wykonuje sortowanie przez zliczanie: najpierw tworzy posortowaną kolekcję par (element, liczba wystąpień elementu) z użyciem kontenera `std::map`. Kontener ten inicjalizuje nieistniejące elementy typu `int` wartością 0. Funkcja następnie przegląda kolejne pary w kolejności zgodnej z posortowaniem (rosnąco względem elementu ciągu) i w strukturze wynikowej umieszcza tyle kopii tego elementu ile zostało zliczone w ciągu wejściowym.

13. **Rozważmy fragment programu pokazany poniżej:**

```
int obliczaj(int n) {
  if (n == 10) return n;
  return 1 + obliczaj(n + 2);
}
```

Jaki wynik zwróci wywołanie `obliczaj(4)`**?**

- ☐ 3
- ☐ 6
- ☐ 10
- ■ 13
- ☐ 16
- ☐ program nie zakończy w ogóle działania (zapętli się)

Rozwiązanie:
Wywołanie `obliczaj`(4) zwraca $1 +$ `obliczaj`(6), czyli $2 +$ `obliczaj`(8), czyli $3 +$ `obliczaj`$(10) = 3 + 10 = 13$.

14. **Palindromem nazywamy słowo, które czytane od lewej brzmi tak samo jak czytane od prawej (na przykład** `anna` **lub** `kajak`**).**
Ile najmniej liter należy zamienić na inne w słowie `abaicka`**, żeby uzyskać palindrom?**

2

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

Rozwiązanie:
Wystarczy zamienić na przykład literę drugą i trzecią, aby uzyskać `akcicka`, które jest palindromem. Zmieniając jedną literę można usatysfakcjonować tylko jedną parę znaków i-ty oraz $(8-i)$-ty, a zatem nie da się uzyskać palindromu zmieniając mniej liter.

15. **Rozważmy fragment programu pokazany poniżej:**

```
int x = ???;
if (x % 3 == 0) {
  cout << "wak";
  for (int i = 0; i+10 < x; i++)
    cout << "tat";
  cout << "acje";
}
```

Jaką największą liczbę naturalną można wstawić w miejsce znaków zapytania, aby program wypisał napis `wakacje`?

9

Rozwiązanie:
Aby wypisany napis był `wakacje`, pętla nie może wykonać się ani razu. A zatem nie może zachodzić warunek $0+10 < x$. Czyli $x \leq 10$. Oprócz tego, aby cokolwiek w ogóle się wypisało, liczba x musi być podzielna przez 3. Największą liczbą podzielną przez 3 i jednocześnie nie przekraczającą 10 jest liczba 9.

16. **Palindromem nazywamy słowo, które czytane od lewej brzmi tak samo jak czytane od prawej. Alfabet angielski składa się z 26 liter.**
Ile jest palindromów wśród wszystkich słów długości 4 składających się jedynie z liter występujących w alfabecie angielskim?

676

Rozwiązanie:
Pierwsze dwie litery można ustawić dowolnie (na jeden z $26 \cdot 26 = 676$ sposobów. To też jednoznacznie determinuje jakie powinny być dwie ostatnie litery.

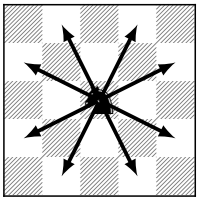
17. **Na ile sposobów możemy zapisać liczbę 5 jako sumę co najmniej dwóch dodatnich składników naturalnych? Sposoby różniące się jedynie kolejnością składników uznajemy za jednakowe.**

6

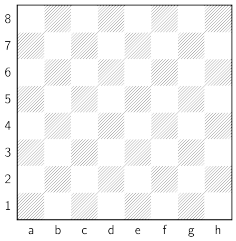
Rozwiązanie:
$5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1$.

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

18. **Skoczek szachowy porusza się w jednym z ośmiu kierunków zgodnie z rysunkiem po lewej stronie. Szachownica wygląda jak na rysunku po prawej stronie.**



Ruchy skoczka szachowego



Pola szachownicy

Jaka jest najmniejsza dodatnia liczba ruchów, które może wykonać skoczek, aby startując z pola `a1` **mógł powrócić w położenie początkowe? Zakładamy, że skoczek nie może zawracać, tzn. wykonując następny ruch nie może skoczyć na pole, na którym był bezpośrednio przed wykonaniem ostatniego ruchu.**

4

Rozwiązanie:

Każdy skok zmienia kolor pola, więc wynik musi być parzysty. Ponadto, warunki zadania zabraniają zawracać, więc wynik musi być równy co najmniej 4. Sposób jego osiągnięcia jest na przykład taki: `a1` → `b3` → `d4` → `c2` → `a1`.

19. **Dzielnikiem liczby naturalnej n jest każda liczba naturalna m taka, że $\frac{n}{m}$ jest liczbą całkowitą.**
Ile dzielników ma liczba 240?

20

Rozwiązanie:

Rozwiążemy to zadanie na dwa sposoby:

(Sposób 1) Jeśli liczba n ma dzielnik m to ma również dzielnik $\frac{n}{m}$. Podzielmy dzielniki na „małe" (mniejsze od $\sqrt{n}$) oraz duże (większe od $\sqrt{n}$). Każdemu małemu dzielnikowi odpowiada unikalny duży dzielnik. Dla liczb będących kwadratami liczby naturalnej mamy jeszcze dzielnik $\sqrt{n}$. Liczba 240 nie jest kwadratem liczby naturalnej i ma następujące małe dzielniki 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15 (10 dzielników). A zatem jest też 10 dużych dzielników: 240, 120, 80, 60, 48, 40, 32, 24, 20 oraz 16, czyli w sumie 20 dzielników.

(Sposób 2) Rozkładamy liczbę 240 na czynniki pierwsze: $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$. Każdy dzielnik liczby 240 musi więc być postaci: $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$, gdzie $\alpha \in \{0,1,2,3,4\}$, $\beta \in \{0,1\}$, $\gamma \in \{0,1\}$. Ponieważ każda liczba ma unikalny rozkład na czynniki pierwsze oraz każdy rozkład na czynniki pierwsze definiuje unikalną liczbę, jest $5 \cdot 2 \cdot 2 = 20$ dzielników.

20. **Rozważmy fragment programu pokazany poniżej:**

```
bool czy1(int n) {
  if (n == 0) return false;
  return (n % 10 == 1) || (czy1(n / 10));
}

int main() {

...

int ile1 = 0;
for (int i = 1; i <= 253; i++)
  if (czy1(i))
    ile1++;
cout << ile1 << "\n";

...

}
```

Jaką liczbę wypisze powyższy program?

134

Rozwiązanie:

Funkcja czy1 zwraca `true` wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n ma jedynkę w zapisie dziesiętnym.

Kod zaś zlicza ile spośród liczb od 1 do 253 włącznie mają w swoim zapisie dziesiętnym chociaż jedną jedynkę. Są to liczby: 1 (jedna liczba), $10, 11 \ldots 19$ (10 liczb), $21, 31, \ldots, 91$ (8 liczb), $100, 101 \ldots 199$ (100 liczb), 201 (jedna liczba), $210, 211, \ldots, 219$ (10 liczb), $221, 231, 241, 251$ (cztery liczby).

21. **Celem poniższej funkcji jest obliczenie ile jest w ciągu (liczb naturalnych) maksimów lokalnych, czyli takich elementów, które są większe od obu swoich sąsiadów. Jeśli element jest pierwszy lub ostatni w ciągu, wystarczy żeby był większy od swojego jedynego sąsiada.**

```
int ile_maks_lokalnych(vector<int>& liczby) {
  int ile = 0, poprzednia = -1, jeszcze_wczesniejsza = -1;
  liczby.push_back(-1);
  for (int liczba : liczby) {
    if ((poprzednia > jeszcze_wczesniejsza) && (poprzednia > liczba))
      ile++;
    ???
    poprzednia = liczba;
  }
  liczby.pop_back();
  return ile;
}
```

Jaką linię należy wstawić w miejsce znaków zapytania?

- ☐ Nic nie trzeba wpisać (wystarczy zmazać znaki zapytania)
- ☐ `liczba = poprzednia;`
- ☐ `jeszcze_wczesniejsza = liczba;`
- ■ `jeszcze_wczesniejsza = poprzednia;`
- ☐ `jeszcze_wczesniejsza = max(liczba, poprzednia);`
- ☐ `poprzednia = jeszcze_wczesniejsza;`

Rozwiązanie:
Funkcja przeglądając kolejne liczby w ciągu cały czas utrzymuje zmienne `poprzednia` oraz `jeszcze_wczesniejsza`. W momencie, gdy zmienna `liczba` zawiera i-tą liczbę, zmienne te przechowują odpowiednio $(i-1)$-szą oraz $(i-2)$-gą liczbę ciągu. Zakładamy przy tym, że ciąg dopełniony jest z lewej i prawej wartościami -1 czyli mniejszymi niż wszystko co mogło wcześniej być w strukturze `liczby` (element -1 na końcu jest nawet rzeczywiście tymczasowo dodawany do struktury, a po wykonaniu obliczeń usuwany).
Po sprawdzeniu warunku na maksimum lokalne konieczne jest przygotowanie się do następnej iteracji (do zwiększenia i). Liczba `jeszcze_wczesniejsza` powinna zostać zatracona. Liczba `poprzednia` powinna zostać przepisana do zmiennej `jeszcze_wczesniejsza` (to jest odpowiedź zadania), zaś `liczba` powinna zostać przepisana do zmiennej `poprzednia`.

22. **Rozważmy fragment programu pokazany poniżej:**

```
vector<pair<int,int>> elementy = {{3, 2}, {2, 5}, {2, 9}, {1, 7}, {9, 0}};
sort(elementy.begin(), elementy.end());
cout << elementy[2][0] << " " << elementy[2][1] << "\n";
```

Co wypisze powyższy kod?

- ☐ 3 2
- ☐ 2 5
- ■ 2 9
- ☐ 1 7
- ☐ 9 0

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

Rozwiązanie:
Pary sortowane są leksykograficznie: tzn. najpierw względem pierwszego elementu, a w przypadku remisu uwzględniane są kolejne elementy aż do znalezienia różnicy.
A zatem kolejność po posortowaniu będzie: $(1, 7)$, $(2, 5)$, $(2, 9)$, $(3, 2)$, $(9, 0)$.

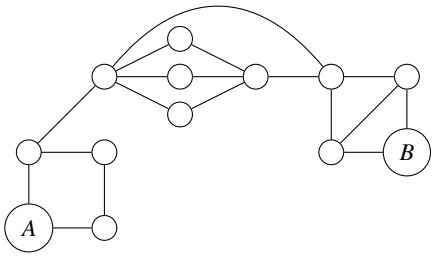
23. **Dla jakich wartości parametru** `liczba` **poniższa funkcja zwraca** 17**?**

```
int funkcja(int liczba) {
  if (liczba == 0)
    return 1;
  return funkcja(liczba / 2) + liczba % 2;
}
```

- ☐ 17
- ☐ 34
- ☐ 289
- ☐ 2^{17}
- ■ $255 \cdot 257$

Rozwiązanie:
Funkcja zwraca 1 plus liczbę zapalonych bitów w zapisie dwójkowym liczby podanej jako parametr. Aby więc funkcja mogła zwrócić 17, musi otrzymać liczbę, która ma szesnaście jedynek w zapisie dwójkowym co dyskwalifikuje liczby 17, 34 oraz 289 (mają one co najwyżej 9 bitów łącznie). Liczba 2^{17} ma tylko jedną jedynkę w zapisie dwójkowym (i siedemnaście zer po niej).
Aby przekonać się, że liczba $255 \cdot 257$ jest rozwiązaniem zadania, wystarczy skorzystać z wzoru skróconego mnożenia: $255 \cdot 257 = (256 - 1)(256 + 1) = (2^8 - 1)(2^8 + 1) = 2^{16} - 1$. Liczba ta ma w zapisie dwójkowym dokładnie szesnaście jedynek (i nic więcej).

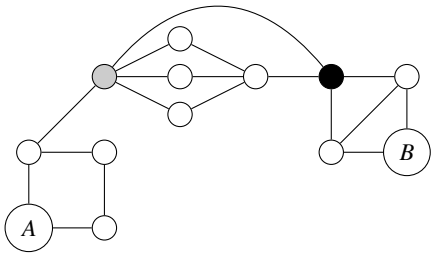
24. **Ile jest ścieżek siedmiokrawędziowych między wierzchołkami** A **i** B **w poniższym grafie? W tym zadaniu rozpatrujemy jedynie ścieżki, w których wszystkie odwiedzone wierzchołki muszą być parami różne. Innymi słowy, ile jest na poniższym rysunku ścieżek, które przechodzą od punktu** A **do punktu** B **poruszając się od punktu do punktu po narysowanych odcinkach, odwiedzając dokładnie** 7 **takich odcinków i nie przechodząc przez żaden punkt dwukrotnie?**



8

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

Rozwiązanie:
Skupmy się na zliczeniu ścieżek długości 4 oraz 5 od A do zaczernionego wierzchołka. Wynikiem zadania będzie liczba ścieżek długości 4 plus dwukrotność liczby ścieżek długości 5.



Z wierzchołka A do szarego wierzchołka można dojść jedynie na dwa sposoby: ścieżką długości 2 lub długości 4. Z szarego wierzchołka jest jedna bezpośrednia krawędź do zaczernionego wierzchołka oraz trzy ścieżki trzykrawędziowe. A zatem do zaczernionego wierzchołka nie ma żadnej ścieżki długości 4 oraz są cztery scieżki długości 5. To oznacza że siedmiokrawędziowych ścieżek między A i B jest $0 + 2 \cdot 4 = 8$.

25. **Rozważmy fragment programu pokazany poniżej:**

```
int ile = 0;
vector<int> liczby = {5, 3, 2, 9, 5, 2, 9, 3, 1, 7};
for (int i = 0; i < liczby.size(); i++)
  for (int j = i+1; j < liczby.size(); j++)
    if ((liczby[i] + liczby[j]) % 2 == 0)
      ile++;
cout << ile << "\n";
```

Jaką liczbę wypisze na wyjście ten program?

29

Rozwiązanie:
Program zlicza liczbę par (i, j) $(i < j)$ pozycji w ciągu, których suma odpowiadających im wartości jest parzysta. W ciągu są dwie liczby parzyste oraz osiem liczb nieparzystych. Aby uzyskać sumę parzystą należy dodać do siebie albo dwie liczby parzyste (tylko 1 sposób), albo dwie liczby nieparzyste ($\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ sposobów). Razem 29 par indeksów (i, j), które spowodują zwiększenie zmiennej `ile`.

26. **Rozważmy fragment programu pokazany poniżej:**

```
int i, liczba = ???;
for (i = 1; liczba <= 10; i += 2)
  liczba = liczba + 1;
cout << i << "\n";
```

Program po skompilowaniu i uruchomieniu wypisał na ekranie liczbę 11. Jaką najmniejszą liczbę całkowitą można wstawić w miejsce znaków zapytania, aby tak się stało?

6

Rozwiązanie:
Każdy obrót pętli `for` powoduje zwiększenie zmiennej `i` o 2. Pętla startuje z $i = 1$, a zatem musi wykonać się dokładnie $\frac{11-1}{2} = 5$ iteracji pętli.
Instrukcja `liczba = (2 * liczba + 3) / 2;` jest równoważna zwiększeniu zmiennej `liczba` o 1. Pętla ma się przerwać po pięciu iteracjach na wartości zmiennej `liczba` równej 11, więc jej wartość początkowa musiała być równa 6.

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

27. **Rozważmy poniższą funkcję:**

```
int funkcja(int liczba) {
  if (liczba == 1) return 0;
  return 1 + funkcja(liczba / 2);
}
```

Jaką wartość zwróci wywołanie `funkcja(1000000)`**?**

19

Rozwiązanie:
Funkcja oblicza logarytm dwójkowy z liczby zaokrąglony w dół do najbliższej liczby całkowitej.
Ponieważ $2^{20} = 2^{10} \cdot 2^{10} = 1024 \cdot 1024 > 1000 \cdot 1000 = 1\,000\,000$ to wynik zadania jest co najwyżej równy 19. Z drugiej strony $2^{19} = 2^{10} \cdot 2^9 = 1024 \cdot 512 < 1100 \cdot 600 = 660\,000$, więc wynik zadania jest co najmniej równy 19.

28. **Rozważmy program, który wczytuje liczby naturalne n oraz m i wykonuje potem dokładnie $2^n \cdot m$ operacji elementarnych w celu obliczenia wyniku. Uruchamiono program na komputerze, który może wykonać 10^8 operacji elementarnych w ciągu sekundy. Dla jakiej wartości n i m wykonanie programu zajmie co najwyżej dwie sekundy?**

- ■ $n = 10$, $m = 10$
- □ $n = 100$, $m = 100$
- ■ $n = 10$, $m = 100$
- □ $n = 100$, $m = 10$
- ■ $n = 1$, $m = 1\,000\,000$

Rozwiązanie:
Ponieważ $2^{100} = (2^{10})^{10} = 1024^{10} > 1000^{10} = 10^{30}$, eliminuje to od razu z rozważań odpowiedzi z $n = 100$.
2^{10} to tylko 1024, więc nawet przemnożone przez 100 mieści się w limicie 10^8 operacji, co oznacza, że należy zaznaczyć odpowiedzi pierwszą i trzecią.
Ostatnią odpowiedź również należy zaznaczyć, bo: $2 \cdot 1\,000\,000 = 2\,000\,000 < 10^8$.

29. **Rozważmy fragment programu pokazany poniżej:**

```
int ile = 0;
vector<int> liczby = {4, 9, 8, 5, 3, 9, 3, 0, 10, 3};
for (int i = 0; i < liczby.size(); i++)
  for (int j = i+1; j < liczby.size(); j++)
    if (liczby[i] + liczby[j] >= 10)
      ile++;
cout << ile << "\n";
```

Jaką liczbę wypisze na wyjście ten program?

27

Rozwiązanie:
Powyższy program oblicza liczbę par indeksów (i, j) $(i < j)$) w ciągu, których odpowiadające wartości sumują się do wartości co najmniej 10.
Odpowiedź zadania nie zmieni się, jeśli posortujemy cały ciąg: $(0, 3, 3, 3, 4, 5, 8, 9, 9, 10)$. Liczba 0 utworzy szukaną parę jedynie z liczbą 10. Liczby 3, 3, 3, 4 oraz 5 utworzą pary jedynie z jedną z liczb 8, 9, 9 lub 10 ($5 \cdot 4 = 20$ par). Liczby 8, 9, 9, 10 tworzą też pary (każda z każdą) między sobą. Jest 6 takich par. Wynik zadania to zatem $1 + 20 + 6 = 27$.

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".

30. **Pewien program wczytuje ciąg liczb o długości n do tablicy, następnie sortuje go używając funkcji `std::sort` i wypisuje wszystkie elementy zgodnie z posortowaniem. Jaką złożoność obliczeniową ma ten program?**

- ☐ $\Theta(\log n)$
- ☐ $\Theta(\sqrt{n})$
- ☐ $\Theta(n)$
- ■ $\Theta(n \log n)$
- ☐ $\Theta(n^2)$

Rozwiązanie:
Dominujący czas programu to w tym przypadku sortowanie, które zajmuje $\Theta(n \log n)$.

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022".